

Naumann による鉱物の結晶形記述の方法の概観

An Overview of Naumann's Method for Describing Crystal Forms of Minerals

大 野 照 文

Terufumi Ohno

(要 約)

本稿の目的は Brauns 著の *Das Mineralreich* で使われていた鉱物の結晶を記述する記号の意味を調べることである。調べたところこれは多様な結晶の形を簡潔に表現することの出来る表記法で Naumann が考案したものだと判った。結晶の形はいくつかの種類の等価な結晶面の集合したものである。Naumann に先立つ Weiss 記号法では、こうした結晶の形を表すのに、立方体なら 6 個、正八面体なら 8 個と言う具合に、全ての面の位置が示されていた。しかし、Naumann は、結晶の対称性が理解されていることを前提に、結晶を構成している等価な結晶面の集合を一つの記号で示す記号法を考案した。ここでは、この記号法と結晶図を組み合わせることで、結晶の形が簡潔に概観できることを等軸晶系の結晶を例に示すことにした。

(キーワード)

Naumann 等価な結晶面 等軸晶系

二十世紀初頭、ドイツの Reinhard Brauns (1903) は、*Das Mineralreich* (鉱物の世界) という鉱物学の入門書を著した。本書には、さまざまな鉱物の結晶やその集合体、あるいは、鉱物を宝石や工芸品として加工したものが 80 葉あまりの主にカラーの図版に収録されている。いずれも選りすぐりの標本や資料が示されていて、見るだけでも楽しく、著者の鉱物に対する愛のようなものを感じることができる。

筆者は最近、この図版の解説を翻訳する機会を得た。図版の美しさとは裏腹に、図版の解説には ∞O 、P、R などといった見慣れない記号が多用されている。調べると、これらは 19 世紀ドイツの鉱物学者 Carl Friedrich Naumann が考案したもので、彼の名を冠して「Naumann の記号法」と呼ばれていることがわかった。本稿では、今日ほとんど用いられることのない Naumann 記号の意味を、その理解に必要な基礎的鉱物学の知識を整理しつつ、概観する。

鉱物結晶の対称性

結晶は、結晶面に囲まれてできている。最初に、結晶の対称性をわかりやすく説明するために、ありふれた鉱物の 1 つである水晶を使って、結晶面の現れ方とその対称性について見てみよう。

Brauns の第 54 図版には、図 1 のような水晶の結晶が示されている。この図からも判るように、自然の中で生じた結晶はみな結晶面の大きさが異なった個性を持った形をし

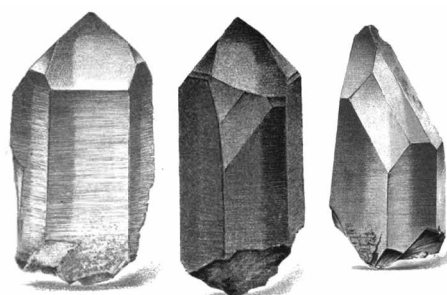


図 1 水晶の結晶 (Brauns, 1903 より)

ている。そのため結晶の形は個性を取り除いて、理想的な形にして扱われる。

結晶の形は、同じ傾きを持った結晶面の繰り返しのよって出来ている。図 2a、b には水晶にみられる結晶面のうち 5 種類をとりあげて理想形として示す。この図を見れば、m 面は、 60° 回転するごとに繰り返す（重なり合う）こと、また r 面と z 面は 120° 回転するごとに繰り返すことが判る。同様に、s 面と x 面も 120° 回転するごとに繰り返すが、図 2a と図 2b では出現の向きが異なっている（s 面と x 面の現れ方には二通りあり、水晶を横から見たとき左肩に両面がでるものを左水晶、右に出るものを右水晶と呼んでいる）。このようにして、鉱物の結晶形の研究では、図 1 のような現実の結晶から対称性を抽出した図 2 のような理想的な形を想定し、これを基に解析が進められてきた。

上に述べたことから判るように、鉱物の結晶形の重要な特徴は、結晶面の現れ方（繰り返し）に様々な対称性が見られることである。対称性を調べるために鏡に映したり、回転させたりすることを対称操作という。面の対称性と対称操作との関係は、表 1 のようにまとめることができる。

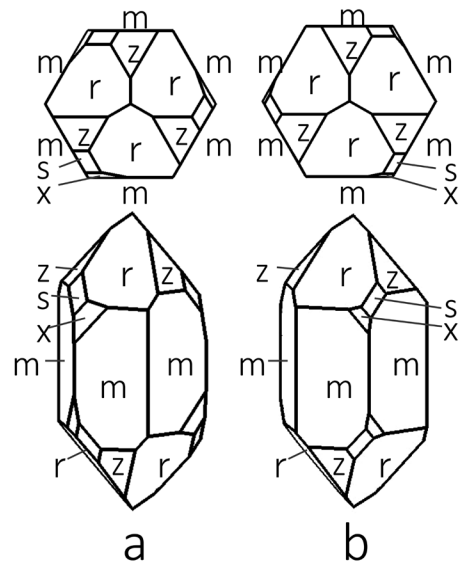


図 2 a 左水晶。b 右水晶。いずれも上から見た図（上）と横から見た図（下）を示す。s、z 面については、一部のみ記号で示す。

表 1 対称性に関連する用語・操作

対称の名称	対称の面、軸、点	対称操作(同じ形になる操作)	操作の内容
回転対称	対称軸(回転軸) axis of symmetry	回転操作 rotation	ある軸のまわりに一定角度回すと同じ形になる
鏡面对称	対称面 symmetry plane	反射操作(鏡に映す操作) reflection	鏡で映した関係で、左右が逆の形になる
点対称	対称中心 center of symmetry	反転操作 inversion	結晶の中心を通して前後、左右、上下が逆の形になる
回映対称 (回反对称)	回映軸(回反軸) axis of rotary reflection	回映操作(回反作用) rotary reflection	回転操作と反射(反転)操作が組み合わさったもの

結晶面の表し方と結晶軸

結晶は立体であるため、立体（三次限の）座標を使って結晶の形を扱うことになる。結晶の形を扱うために使われる立体座標は結晶軸と呼ばれる。以下に、結晶軸を使った結晶面の表し方について説明する。

結晶軸や結晶面の表し方には、Weiss、Nauman、Miller によるものなどがあるが、本稿は結晶学が未発達の時代に鉱物の結晶記載に大きな影響を与えた Naumann の記号について説明する。

結晶軸

結晶の形は鉱物の種類によって様々で大きく異なるため、1つの単純な立体座標では扱えず、基準の異なった座標軸が使われる。これが結晶軸で、表2のような6種類のものがある。ここでは六方晶系以外で使われる3本の軸について説明する(図3)。

結晶軸の3軸のうち前後軸(手前から奥への軸)をa軸、左右の軸(横軸)はb軸、垂直の軸(垂直軸)はc軸とする。(図3a)。3軸の交点を原点とする。前後軸は前向きを正、横軸は右向きを正、垂直軸は上向きを正とする。

b軸とc軸、c軸とa軸、a軸とb軸のなす角度は軸角と呼ばれ、それぞれ、 α 、 β 、 γ で示される。結晶面は、3軸と交わる座標によって決めることが出来る。

ここで注意すべきは、結晶軸の場合、3軸の目盛り、つまり3軸の単位の長さは必ずしも同じではないことである。軸の単位の長さの比は軸率として示される(表2)。

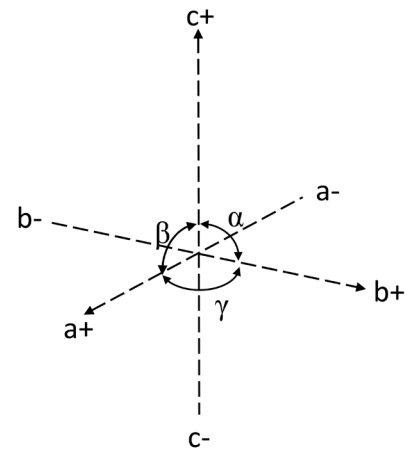


図3 結晶軸

表2 結晶系の結晶軸、対称性

結晶系	軸の数	軸の単位の長さ (軸率)	軸角	結晶軸の特徴	Naumann 記号のシンボル*
等軸晶系 (立方晶系)	3本	$a=b=c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	三軸は互いに直交 三軸の単位の長さは等しい	O
正方晶系	3本	$a=b \neq c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	垂直軸は4回対称	P
直方晶系 (斜方晶系)	3本	$a \neq b \neq c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	三軸が直交するが長さの単位は異なる	P
六方晶系	4本	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$	$\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma=120^\circ$	垂直軸(c軸)に三軸が交わる c軸は6回対称	P, R
単斜晶系	3本	$a \neq b \neq c$	$\alpha=\gamma=90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$	c軸、b軸は直交 a軸はc軸に斜交	P
三斜晶系	3本	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ いずれも $\neq 90^\circ$	三軸はすべて斜交する	P

*六方晶系では、菱面体の対称を持つ結晶面にRが使われる。

結晶面の表示法

Weiss (1817) は、結晶学が発展し始めた初期、結晶の形を記述するために結晶面を表す記号を考案した。それは結晶面の傾きを結晶軸と交わる長さ(標軸・標軸値)を使って示す方法であった。

Weissの記号は、3つの結晶軸を切る(交わる)標軸の比を使って結晶面を表す。先に述べたように、結晶系によって三軸の単位の長さは同じ場合も、異なる場合もある。例えば、等軸晶系では3軸の単位の長さは同じなので三軸と単位の長さで交わる結晶面はaと言う記号を使ってa:a:aと表せる。また、正方晶系では二軸の単位の長さが同じで、第三軸は異なるので、2つの記号a、bを使ってa:a:bと表せる。直方晶系、単斜晶系、三斜晶系では、三軸の単位の長さが異なるので、3つの記号a、b、cを使ってa:b:c

のように表せる。

もう少し具体的に示すと、例えば等軸晶系の立方体や正八面体は、図4のようにそれぞれの面を次のような記号で表示することができる。

六面体では、どの面も2軸と平行である。これは無限大のところとで交わると考えて、 ∞ という記号で表わす。そこで、六面体の面は $1a:\infty a:\infty a$ 、 $-1a:\infty a:\infty a$ 、 $\infty a:1a:\infty a$ 、 $\infty a:-1a:\infty a$ 、 $\infty a:\infty a:1a$ 、 $\infty a:\infty a:-1a$ と表せる。

正八面体の面は、 $1a:1a:1a$ 、 $1a:-1a:1a$ 、 $1a:1a:-1a$ 、 $1a:-1a:-1a$ 、 $-1a:1a:1a$ 、 $-1a:-1a:1a$ 、 $-1a:1a:-1a$ 、 $-1a:-1a:-1a$ という8つの記号で表すことができる。

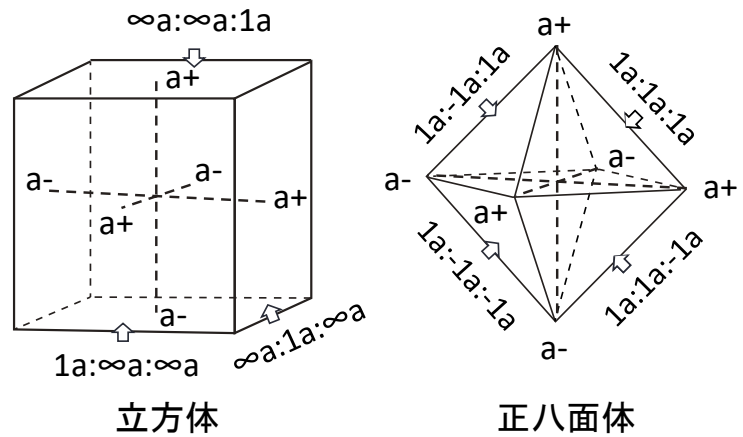


図4 Weiss 記号による結晶面の表し方

等価な結晶形とその集合（フォーム）

ここで、以下の議論にとって重要な等価の結晶形について説明する。回転操作、反射（鏡に映す）操作、反転操作、回映操作などによって互いに繰り返す（重なり合う）位置関係にある結晶面のことを等価の結晶面と呼ぶ。例えば、図2の m 、 r 、 z 、 s 、 x など、同じ記号で示された結晶面どうしは等価な結晶面である。等価な結晶面の集合は Form (Hurlbut, 1944) と呼ばれる。Form に対応する日本語訳は見当たらないので、以下にはフォームと表記する。

Naumann の記号法

Naumann (1828, 1859) は、結晶の面と形を表す画期的な記号を考案した。ここでは、等軸晶系の結晶を例に Naumann の記号法の特徴を探りたい。Weiss の記号法を使えば、先に示したように、立方体は6つの面をそれぞれの記号を使って、正八面体は8つの面をそれぞれの記号を使って示すことができる。一方、図4を見れば、立方体や正八面体では、全ての面は回転、反射、反転、回映などの対称操作によって繰り返す（重ね合わせることができる）面、つまり等価な面であることは明らかである。そこで Naumann は結晶系の対称性を前提として、等価の面を全て列挙しなくても、1つの記号で全ての面を代表させることが出来る表記法を考案した。ここで、ようやく、本稿の最初に示した $\infty O \infty$ 、 P 、 R といった記号は、等価な面を簡潔に示すために Naumann が考案した記号であることが判る。以下に等軸晶系を例に Naumann の記号の基本について説明する（表3、図5）。

等軸晶系には、等価の面のみで囲まれた結晶形つまりフォームの代表的なものが7つある（表3）。7つのフォームの1つ、正八面体では、各面は各軸を同じ長さで切るなので、代表的な面は Weiss 記号で $1a:1a:1a$ と表せる。他の6つのフォームも代表的な面が各軸を切る長さの比で表現できる。そのうち一番小さなものを1と置くと、一般的に各軸を切る長さの比は $1:n:m$ ($m>n$) となり Weiss 記号では

表 3 等価な結晶面を表す Naumann 記号、Weiss 記号、Miller 指数

Naumann 記号	代表的な面の Weiss 係数	等価な結晶面からできた結晶形(フォーム)	説明	Miller 指数
O	a:a:a	正八面体(8 つの正三角形で出来ている)	三軸すべて 1a で交わる面の集まり	{111}
∞ O	a:a: ∞ a	菱形十二面体(12 の菱形の面で囲まれている)	二軸で 1a と交わり、もう一軸と平行(∞ a で交わる)な面の集まり	{110}
∞ O ∞	a: ∞ a: ∞ a	立方体(6 つの正方形の面で囲まれている)	一軸で 1a と交わり、他の 2 軸とは平行(∞ a で交わる)な面の集まり	{100}
mO	a:a:ma	三八面体(正八面体のそれぞれに三角錐が乗る)	二軸と 1a で交わり、もう一軸とは a より大きな座標 ma で交わる面の集まり	{hhl}
∞ O ∞	a:na: ∞ a	四六面体(立方体のそれぞれに四角錐が乗る)	一軸と a で交わり、もう一軸とは a より小さな座標 na で交わり、第三軸とは平行(∞ a で交わる)な面の集まり	{hk0}
mOm	a:ma:ma	偏方二十四面体(正八面体の各面に 4 枚の不等辺四角形が乗る)	一軸と a で交わり、他の二軸とは a より大きな座標 ma で交わる面の集まり	{hkk}
mOn	a:na:ma	六八面体(正八面体の各面に六角錐が乗る)	一軸と 1a で交わり、他の二軸とは異なる大きさ m、n ($m>n$)の座標で交わる面の集まり	{hkl}

注)本稿では、Miller 記号は扱わないが、読者の便を考え、対応する Miller 記号も示した。

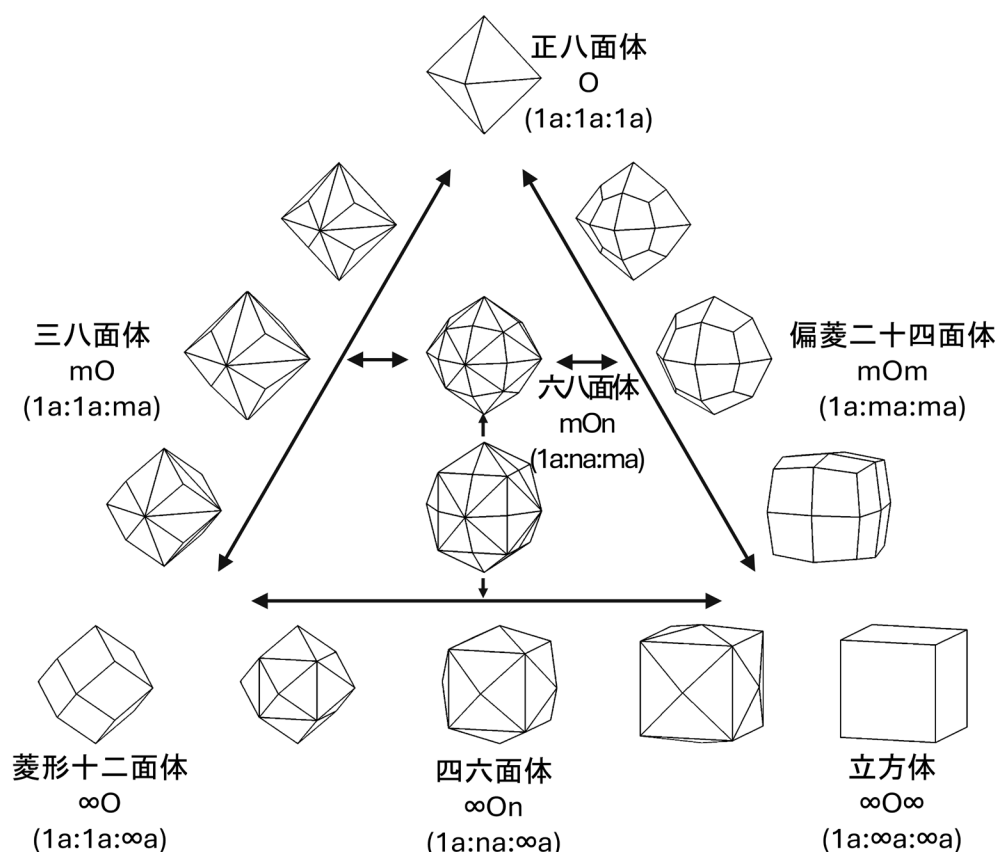


図 5 Naumann による等軸晶系の 7 つのフォームの関係

$1a:na:ma$ と表せる。また軸に平行な場合は、軸と無限遠で交わるとして ∞ で表現する。

Naumann は 7 つのフォームを直感的に示すために次のように記号を考案した。7 つのフォームの代表を正八面体 *O* *Oktaëder* に取り、その頭文字 *O* をとって記号の中心においた。そして、各フォームの Weiss 記号の係数のうち 1 は表現しないこととした。残りの二つの係数が 1 より大きいときには、他の 2 つの係数のうち大きいほうを *m* と表して *O* の前に置き、小さいほうを *n* と表して *O* を後ろに記すという基準を設けた。

この方式に従えば、正八面体の各結晶面は Weiss 記号の係数がすべて 1 ($1a:1a:1a$) なので、Naumann 記号は *O* となる。また、立方体の全ての結晶面は二つの軸に平行なので、 $\infty O \infty$ ($1a:\infty a:\infty a$) と表現できる。他のフォームについては、表 3 を参照されたい。このように考えると表 3 の等軸晶系の 7 つのフォームに対する Naumann の記号の意味が理解できるだろう。

Naumann 記号の利点は、*O* なら等価の面が三軸と同じ距離で交わるフォーム、 $\infty O \infty$ なら、二つの軸に平行な結晶面からできたフォーム、また ∞O なら一つの軸に平行な結晶面からできたフォームというようにフォームの形が直感的にわかることである。

さらに、この表現は、表 3、図 5 に挙げた 7 つのフォームの間の関係を理解するにも役立つ。例えば、正八面体 *O* の面 ($1a:1a:1a$) で、まじわる軸の一つを *m* 倍すると、三八面体 *mO* ($1a:1a:ma$) が出来る。さらに *m* を大きくして ∞ にすると、菱形十二面体 ∞O ($1a:1a:\infty a$) が出来る。同様に、菱形十二面体 ∞O の二つの $1a$ のうち一つの係数を 1 より大きな数 *n* にとると、四六面体 ∞On ($1a:na:\infty a$) となる。この *n* を無限大にすると、立方体 $\infty O \infty$ ($1a:\infty a:\infty a$) となる。図 5 の右の斜線沿いの正八面体から立方体への変化、あるいはその他については、読者に確認を委ねる。

完面形と半面形

これまで述べてきた七つ七つの結晶形 (フォーム) は、対称性から考えられる全ての可能な面から出来ていて完面像と呼ばれる。結晶形の中には、その半分の面しか持たないものがあり、これは、半面像と呼ばれる。正八面体とその半面像である四面体の関係を図 6 に示す。図 6a では、正八面体の面の内、 $1:1:1$ 、 $1:-1:-1$ 、 $-1:-1:1$ 、 $-1:1:-1$ の 4 つの面が発達して四面体が生じている。図 6b では、 $1:-1:1$ 、 $1:1:-1$ 、 $-1:1:-1$ 、 $-1:-1:1$ の 4 面が発達

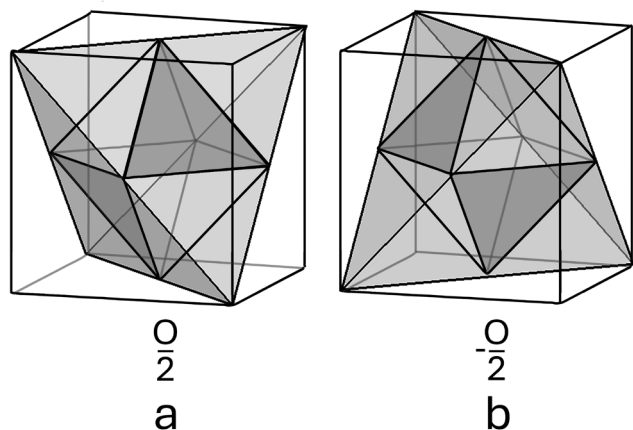


図 6 正八面体の半面像としての四面体

して四面体が生じている。図 6a では、各座標の - 符号が 0 ないし偶数個なので、正の四面体、図 6b では、各座標 - の符号が奇数なので負の四面体と呼ばれている。Naumann は、半面像であることを示すために、図 6 に示すように、*O* を 2 で割ったような記号を考案した。また、正と負を区別するために、負を表す記号には、前に - をつけている。

まとめ

本稿の目的は筆者が Brauns の *Das Mineralreich* で使われた鉱物の結晶を記述する記号がどういう意味を持つかを調べることであった。そのために、先ず鉱物の対称性と結晶軸のあり方にふれた後、結晶には対称性を満たす等価な結晶面が作る結晶形（フォーム）が存在することを述べた。その上で、結晶面を表わす基礎として結晶軸、単位長さ（標軸）、軸率などを説明した。さらに、結晶面が結晶軸と交わる座標の表現方法として、Weiss の記号法を紹介した。Weiss の記号では、正八面体では 8 つの座標で、立方体では 6 つの座標でそれぞれ等価な面を表すことができる。一方、Naumann は、結晶の対称性が理解されていることを前提に、等価な結晶面の集合であるフォームを簡潔に表わす Naumann 記号を考案した。この点について、本稿では等軸晶系に焦点を絞り、表 3 と図 4、図 5、図 6 で概略を説明した。

Naumann は、等価な結晶面を簡潔に示すことによって、正八面体、菱形十二面体、立方体を三角形の頂点とし、その内外に、他の 4 つの晶相を配置し、それぞれが軸の係数（標軸）を変えることで、正八面体、菱形十二面体へと連続的に変化することを示している（図 5）。これによって、等軸晶系の 7 つの等価な結晶面の結晶形（フォーム）が共通の対称性を持つことを直感的に理解出来る。今日では、外形の対称性を純粋に幾何学的に分類した 32 晶族、あるいは、これをより数学的かつ抽象的に点群として表現することが行われていて、点群の表現では、先の 7 つのフォームは、 $m\bar{3}m$ (Oh) と表わされている。しかし、鉱物に親しむ上では、Naumann の記号法はより具体的であり、これからも、初心者や鉱物愛好家が鉱物を理解する入り口としての活用が望まれる。

謝辞

本稿の執筆にあたり、結晶形態の専門家で、筆者の鉱物趣味における長年の先輩でもある高田クリスタルミュージアム（鉱物と結晶の博物館）館長・高田雅介氏に草稿をご閲読いただいた。同氏からは、筆者の誤解や誤謬に対して懇切丁寧なご指摘を賜り、そのおかげで内容を大幅に改善することができた。ここに厚く御礼申し上げる。なお、本稿に残る不備・誤りについては、すべて筆者に責任があることを申し添える。

参考文献

Brauns, R. (1903) *Das Mineralreich* (Band 1). Fritz Lehmann Verlag, Stuttgart

https://zenodo.org/records/17273733?utm_source=chatgpt.com (参照 2025 年 11 月 4 日)

地学団体研究会地学事典編集委員会（編）（1981）地学事典．増補改訂版，平凡社

Hurlbut, C. S., Jr. (1944) *Dana's Manual of Mineralogy*, fifteenth edition, John Wiley & Sons, Inc.

<https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-dana1944manualmineralogy.pdf> (参照 2025 年 11 月 3 日)

菊池安（編）（1894）*鉱物學教科書：中等教育 上巻*，敬業社

<https://dl.ndl.go.jp/pid/1082730> (参照 2025 年 11 月 3 日)

文部省（1994）*学術用語集 地学編*，丸善（株）出版事業部

Naumann, C. F. (1828) *Lehrbuch der Mineralogie*. A. Rücker, Berlin

<https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-71108> (参照 2025 年 11 月 1 日)

Naumann, C.F. (1859) *Elemente der Mineralogie*, W. Engelmann, Leipzig

<https://archive.org/download/elementedermine08naumgoog/elementedermine08naumgoog.pdf> (参照 2025 年 11 月 4 日)

高田雅介 (2010) 日本産鉱物の結晶形態 高田鉱物標本・結晶図集, 「ペグマタイト」誌 100 号記念出版, 今井裕之・菊池善和

Weiss, C. S. (1817). Ueber eine verbesserte Methode für die Bezeichnung der verschiedenen Flächen eines Krystallisationssystems, nebst Bemerkungen über den Zustand der Polarisierung der Seiten in den Linien der krystallinischen Structur. *Abhandlungen der physikalischen Klasse der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*: 286-336.

<https://dn790006.ca.archive.org/0/items/abhandlungenderp16akad/abhandlungenderp16akad.pdf> (参照 2025 年 11 月 1 日)

なお、結晶の図の作成は、Smorf crystal drawing (<https://www.smorf.nl/draw.php?lang=en>) によって行った。